

# 分布バネにより支持されたたはりの 強制変位問題

東洋大学

鈴木 崇伸

## 研究背景と目的

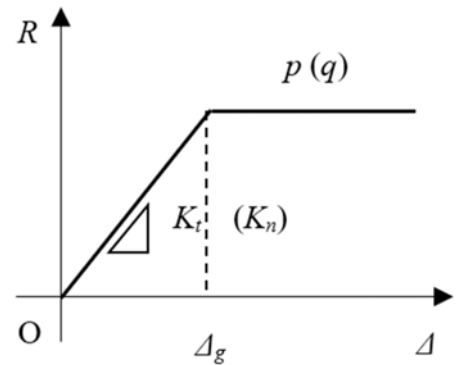
- 分布バネにより支持されたたはりには地盤と構造物の相互作用を近似できるため、一般的に用いられているモデルとなっている。
- 分布バネは主に地盤の弾性的性質を近似するために用いられるが、地盤は変形が大きくなると弾塑性的な挙動、あるいは剛塑性的挙動をする材料であり、変形が大きい場合には分布バネが降伏する非線形特性が採用される。
- 地盤の弾性的性質と弾塑性的性質は地盤変位により徐々に変質すると考えられるが、バイリニア特性が仮定できれば両者は解析接続して計算することができる。
- 解析接続したたはりの解は埋設管等の変形解析に応用することができる。

# 一定の変位で降伏する分布バネ

- 埋設管等の地震応答解析には地盤反力を分布バネにより表したはり解析が用いられており、地盤と管の接触力の特性を近似的に表したモデルに強制変位を作用させる計算が行われている。
- Rを単位長さ当たりの地盤反力とすると管と地盤の相対変位 $\Delta$ が小さい範囲では両者は比例関係になり、相対変位 $\Delta$ が大きくなると一定値（等分布力）になる実験結果が多く用いられている。
- バイリニア特性の独立なパラメータは2個（第2勾配が0でない場合は3個）

軸方向  $p = K_t \Delta_g$

軸直角方向  $q = K_n \Delta_g$



3

# 正弦波状の地盤変位が作用するはり

- 完全弾塑性型の特徴であれば、ある変位以上では一定力が作用するはりの断面力を計算できる。はりの変位と地盤変位が比例することを利用する。

## 軸変形

U：地盤変位振幅， $U_1$ ：腹の位置において降伏条件となる変位振幅， $x_0$ ：地盤反力が一定値となる座標

$$U_1 - C_a U_1 = \Delta_g \quad x_0 = \frac{L}{2\pi} \sin^{-1} \frac{U_1}{U}$$

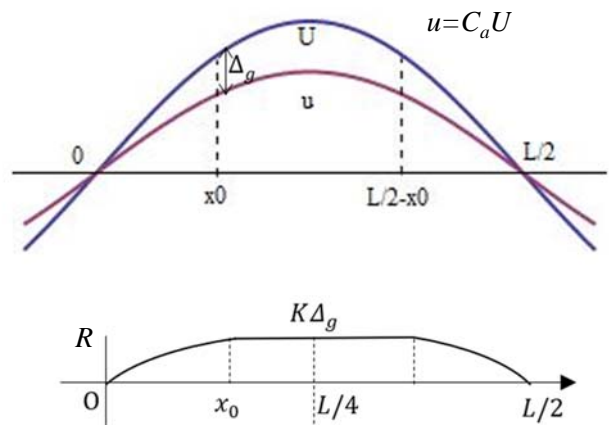
$$N(0) = \frac{K_t L \Delta_g}{2\pi} \left\{ \frac{U}{U_1} - \sqrt{\left(\frac{U}{U_1}\right)^2 - 1} + \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{U_1}{U} \right\}$$

## 曲げ変形

V：地盤変位振幅， $V_1$ ：腹の位置において降伏条件となる変位振幅， $x_0$ ：地盤反力が一定値となる座標

$$V_1 - C_b V_1 = \Delta_g \quad x_0 = \frac{L}{2\pi} \sin^{-1} \frac{V_1}{V}$$

$$M\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{K_n \Delta_g L^2}{8\pi^2} \left\{ 2 + \frac{\pi^2}{4} - 2 \sin^{-1} \frac{V_1}{V} \sqrt{\left(\frac{V}{V_1}\right)^2 - 1} - \left(\sin^{-1} \frac{V_1}{V}\right)^2 \right\}$$



鈴木崇伸：応答変位法による地中構造物の軸変形解析に関する一考察，土木学会論文集A1（構造・地震工学）Vol. 65 No.1, pp.263-272, 2009

鈴木崇伸：応答変位法による地中構造物の曲げ解析に関する一考察，土木学会論文集A1（構造・地震工学）Vol. 68 No. 4, I\_807-816, 2012.

4

# 断面力の近似式

逆三角関数の入った断面力の計算式は地盤変位が大きくなると一定値に収束する。断面力と地盤変位振幅が比例する関係を延長して近似計算が行える。断面力は地盤変位の波長に比例する関係式となる。

軸変形

U → U<sub>1</sub> とすると

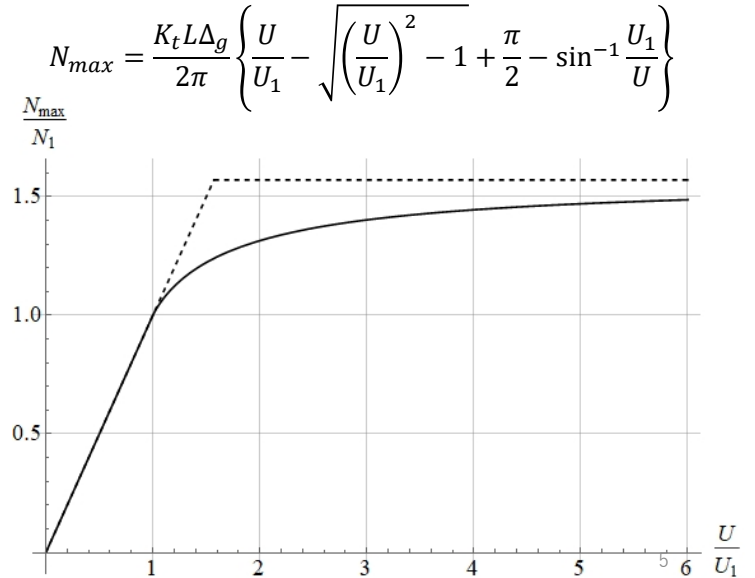
$$N(0) = \frac{K_t L \Delta_g}{2\pi}$$

U → ∞ とすると

$$N(0) = \frac{K_t L \Delta_g}{4}$$

バイリニアで近似すると

$$N_{max} \approx \begin{cases} \frac{2\pi E A C_a U}{L} & U < \frac{\pi}{2} U_1 \\ \frac{1}{4} K_t \Delta_g L & U > \frac{\pi}{2} U_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} U_1 &= \frac{\Delta_g}{1 - C_a} \\ N_1 &= \frac{K_t L \Delta_g}{2\pi} \end{aligned}$$



曲げ軸変形

V → V<sub>1</sub> とすると

$$M\left(\frac{L}{4}\right) \rightarrow \frac{K_n \Delta_g L^2}{4\pi^2}$$

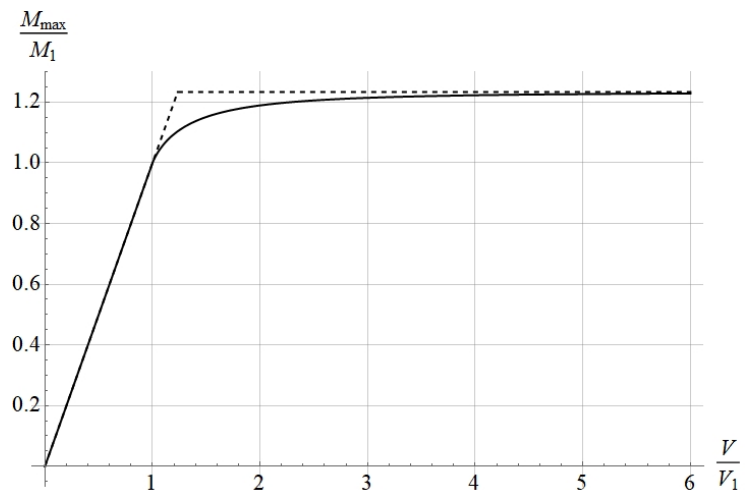
V → ∞ とすると

$$M\left(\frac{L}{4}\right) \rightarrow \frac{1}{32} K_n \Delta_g L^2$$

バイリニアで近似すると

$$M_{max} \approx \begin{cases} \frac{4\pi^2 E I C_b V}{L^2} & V < \frac{\pi^2}{8} V_1 \\ \frac{1}{32} K_n \Delta_g L^2 & V > \frac{\pi^2}{8} V_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} V_1 &= \frac{\Delta_g}{1 - C_b} \\ M_1 &= \frac{K_n \Delta_g L^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

$$M_{max} = \frac{K_n \Delta_g L^2}{8\pi^2} \left\{ 2 + \frac{\pi^2}{4} - 2 \sin^{-1} \frac{V_1}{V} \sqrt{\left(\frac{V}{V_1}\right)^2 - 1} - \left(\sin^{-1} \frac{V_1}{V}\right)^2 \right\}$$



# 段差状の地盤変位が作用するはり(軸変位)

- 等分布力と分布バネが連続する支配方程式

$$\begin{aligned} EAu'' &= -p & (0 \leq x \leq L) \\ EAu'' &= -K_t(\delta - u) & (L \leq x) \end{aligned}$$

- Lを未定とした方程式の解

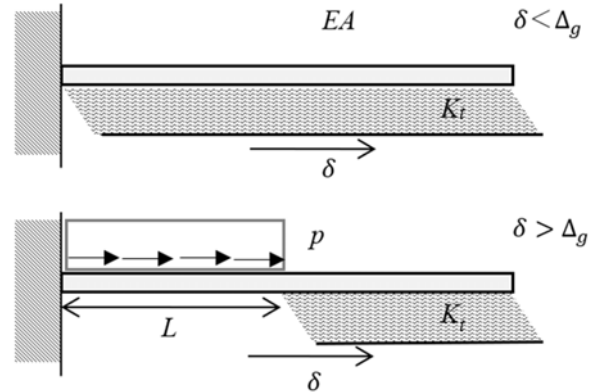
$$u(x) = \begin{cases} \frac{pL^2}{EA} \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{L\lambda_a + 1}{L\lambda_a} \left(\frac{x}{L}\right) \right] & (0 \leq x \leq L) \\ \delta - \Delta_g \exp(-\lambda_a(x - L)) & (L \leq x) \end{cases}$$

- 境界点の変位条件

$$u(L) = \delta - \Delta_g = \frac{pL^2}{EA} \left( -\frac{1}{2} + \frac{L\lambda_a + 1}{L\lambda_a} \right)$$

- Lを決める式

$$(L\lambda_a + 1)^2 + 1 = \frac{2\delta}{\Delta_g}$$



鈴木崇伸: 非線形なばねで支持されたはりの近似解析法、土木学会論文集No.689/ I -57, pp. 109-116, 2001

# 段差状の地盤変位が作用するはり(たわみ)

- 等分布力と分布バネが連続する支配方程式

$$\begin{aligned} EIv^{(4)} - q &= 0 & 0 \leq x \leq L \\ EIv^{(4)} + K_n(v - \delta) &= 0 & L \leq x \end{aligned}$$

- Lを未定とした方程式の解

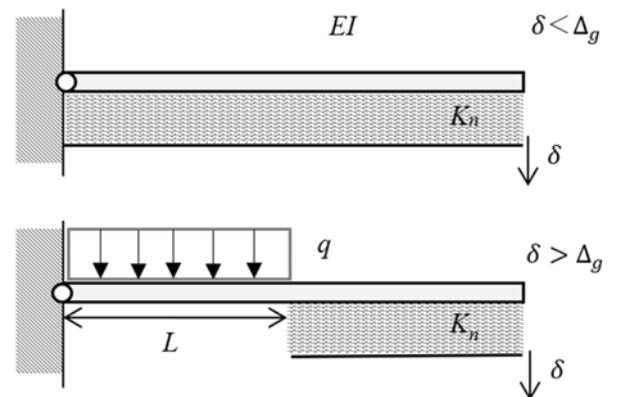
$$v(x) = \begin{cases} \frac{qL^4}{EI} \left[ \frac{1}{24} \left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{1 + L\lambda_b}{12L\lambda_b} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{(L\lambda_b)^3 + 3(L\lambda_b)^2 + 3L\lambda_b + 3}{12(L\lambda_b)^3} \left(\frac{x}{L}\right) \right] & (0 \leq x \leq L) \\ \delta - \Delta_g e^{-\lambda_b(x-L)} [\cos \lambda_b(x-L) - L\lambda_b \sin \lambda_b(x-L)] & (L \leq x) \end{cases}$$

- 境界点の変位条件

$$v(L) = \delta - \Delta_g = \frac{qL^4}{EI} \left( \frac{1}{24} - \frac{1 + L\lambda_b}{12L\lambda_b} + \frac{(L\lambda_b)^3 + 3(L\lambda_b)^2 + 3L\lambda_b + 3}{12(L\lambda_b)^3} \right)$$

- Lを決める式

$$(L\lambda_b)^4 + 4(L\lambda_b)^3 + 6(L\lambda_b)^2 + 6(L\lambda_b) + 6 = \frac{6\delta}{\Delta_g}$$



鈴木崇伸: 非線形なばねで支持されたはりの近似解析法、土木学会論文集No.689/ I -57, pp. 109-116, 2001

# 解析解の近似

等分布力が作用する区間の長さLを決める多項式は近似計算が可能であり、近似式をそれぞれL+1/λとすると1回微分が0になる。

軸変形の近似式

曲げ変形の近似式

$$\tilde{u}(x) = \frac{pL^2}{EA} \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{L\lambda_a + 1}{L\lambda_a} \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$\tilde{v}(x) = \frac{qL^4}{EI} \left[ \frac{1}{24} \left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{1 + L\lambda_b}{12L\lambda_b} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{(L\lambda_b + 1)^3 + 2}{12(L\lambda_b)^3} \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

x = L + 1/λ<sub>a</sub>の境界値

x = L + 1/λ<sub>a</sub>の境界値

$$\tilde{u} \left( L + \frac{1}{\lambda_a} \right) = \frac{pL^2}{2EA} \left( \frac{L\lambda_a + 1}{L\lambda_a} \right)^2 \approx \delta$$

$$\tilde{v} \left( L + \frac{1}{\lambda_b} \right) = \frac{qL^4}{EI} \left[ \frac{1}{24} \left( \frac{L\lambda_b + 1}{L\lambda_b} \right)^4 + \frac{L\lambda_b + 1}{6(L\lambda_b)^4} \right] \approx \delta$$

$$\tilde{u}' \left( L + \frac{1}{\lambda_a} \right) = 0$$

$$\tilde{v}' \left( L + \frac{1}{\lambda_b} \right) = \frac{qL^3}{6EI} \frac{1}{(L\lambda_b)^3} \approx 0 \quad \tilde{v}'' \left( L + \frac{1}{\lambda_b} \right) = 0$$

近似計算の境界条件

$$\tilde{u}(b) = \delta \quad \tilde{u}'(b) = 0$$

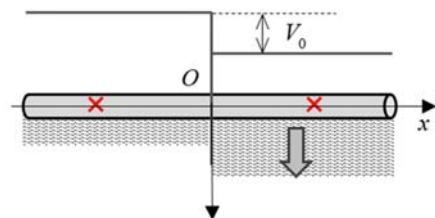
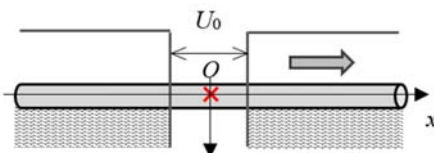
近似計算の境界条件

$$\tilde{v}(b) = \delta \quad \tilde{v}'(b) = 0 \quad \tilde{v}''(b) = 0$$

9

# 段差状の地盤変位が作用するはりの解析解

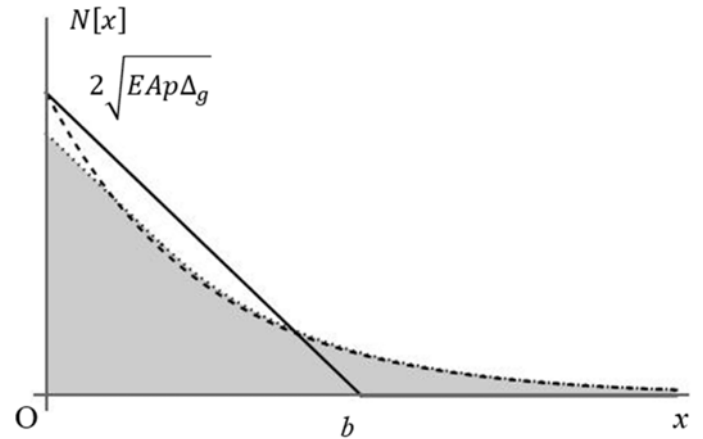
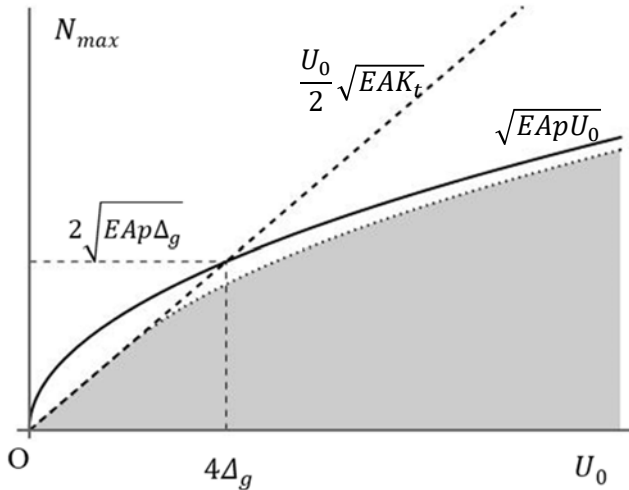
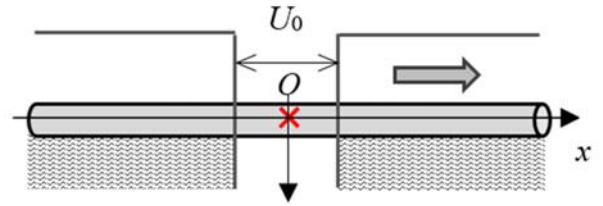
	分布バネが降伏しない場合	等分布力の場合
軸変位	$u[x] = \frac{U_0}{2} (1 - e^{-\lambda_a x})$ $N_{max} = EAu'(0) = \frac{U_0}{2} \sqrt{EAK_t}$	$u[x] = \frac{U_0 x}{2b} + \frac{pb^2}{2EA} \left\{ -\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right) \right\} \quad b = \sqrt{\frac{EAU_0}{p}}$ $N_{max} = EAu'[0] = \sqrt{EApU_0}$
たわみ	$v[x] = \frac{V_0}{2} (1 - e^{-\lambda_b x} \cos \lambda_b x)$ $M_{max} = -EIv'' \left[ \frac{\pi}{4\lambda_b} \right] = \frac{\sqrt{2}e^{-\pi/4}V_0}{4} \sqrt{EIK_n}$	$v[x] = \frac{V_0 x}{2b} + \frac{qb^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{b}\right)^3 + \left(\frac{x}{b}\right) \right\} \quad b = \sqrt[4]{\frac{12EI V_0}{q}}$ $M_{max} = -EIv'' \left[ \frac{b}{2} \right] = \frac{1}{4} \sqrt{3EIqV_0}$



10

# 最大軸力の計算

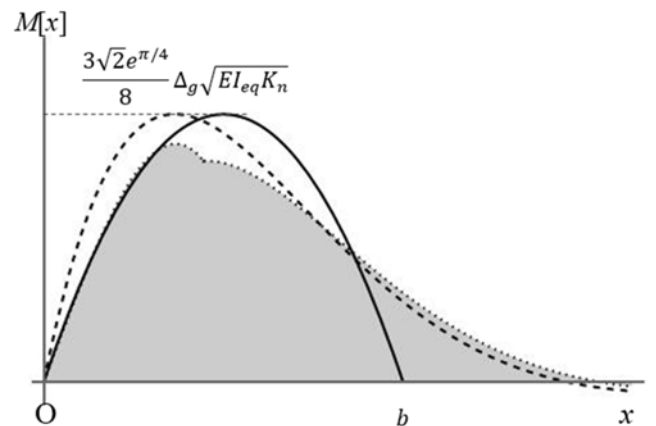
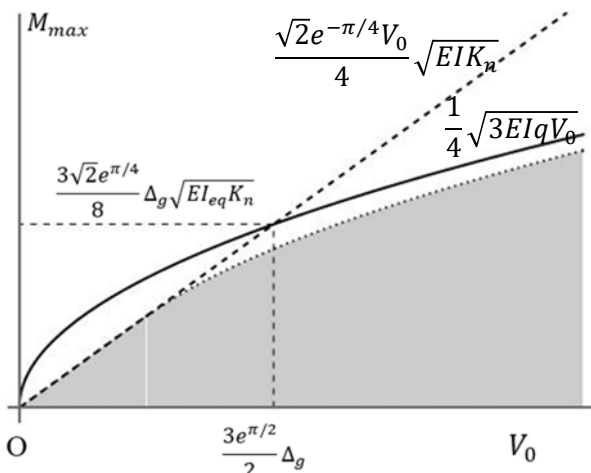
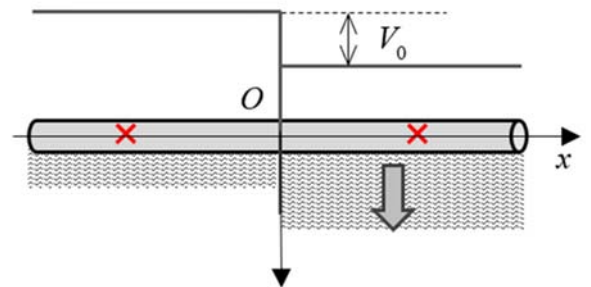
実線: 等分布力が作用するはり  
 点線: 分布バネで支持されたはり  
 ハッチ部: 2つの条件が連続するはり



地盤変位が小さい場合は分布バネ, 大きい場合には等分布力の解が適合している<sup>11</sup>

# 最大曲げモーメントの計算

実線: 等分布力が作用するはり  
 点線: 分布バネで支持されたはり  
 ハッチ部: 2つの条件が連続するはり



地盤変位が小さい場合は分布バネ, 大きい場合には等分布力の解が適合している<sup>12</sup>

## まとめと課題

- 地盤変位の関数形が単純であれば、分布バネと等分布力を混在させたはりの解析解を得ることができる。
- 反力特性をバイリニアにする場合、断面力も2種類の関数を接合して近似計算することができる。
- 断面力の方程式によれば地盤変位と同程度に分布バネあるいは等分布力が影響する。一定の精度が要求される。
- 分布バネあるいは等分布力の条件は埋設実験の引用が基本となるが、実際の構造条件や埋設条件に対応できることが望ましい。